Γραμμική Άλγεβρα 1 15/10/15

Ορισμός: Δύο πίνακες $A, B \in F^{\nu \cdot \nu}$ μετατίθενται αν $AB = B \cdot A$

π.χ. Αν $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, είδαμε $AB \neq BA$, άρα οι A B δεν μετατίθενται.

π.χ. Έστω $A = I_\nu = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} \in F^{\nu \cdot \nu}$ και $B \in F^{\nu \cdot \nu}$. Έχουμε $AB = I_\nu B = B = B \cdot I_\nu$ ε' $BA = B \cdot I_\nu = B$

Άρα ο I_ν μετατίθεται με κάθε πίνακα $B \in F^{\nu \cdot \nu}$ αφού $AB = BA$

Υπενθύμιση: Αν $A \in F^{\nu \cdot \mu}$, τότε $A^t \in F^{\mu \cdot \nu}$

Πρόταση: Έστω $A, B \in F^{\nu \cdot \nu}$. Τότε $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$

Απόδειξη

Έστω $A = (a_{ij})$, $B = (b_{jk})$. Τότε η (i,k)-συντεταγμένη του AB είναι ίσοι $\sum_{j=1}^{\nu} a_{ij} b_{jk}$. Επομένως η (k,i) συντεταγμένη του $(AB)^t$ είναι ίση με $\sum_{j=1}^{\nu} a_{ij} b_{jk}$ (από τον ορισμό του ανάστροφου)

Η (k,j)-συντεταγμένη του B^t είναι ίση με την (j,k) συντεταγμένη του B δηλαδή ίση b_{jk}. Η (j,i)-συντεταγμένη του A^t είναι ίση με την (i,j)-συντεταγμένη του A, άρα ίση με a_{ij}.

Επομένως από τον ορισμό του γινομένου πινάκων, έχουμε ότι η (k,i) συντεταγμένη του $B^t A^t$ είναι ίση με $\sum_{j=1}^{\nu} b_{jk} \cdot a_{ij} = \sum_{j=1}^{\nu} a_{ij} b_{jk}$ και άρα $(B^t)(A^t) = (AB)^t$

Αντιστρέψιμοι Πίνακες

Παρατήρηση: Η αντιστρεψιμότητα έχει νόημα μόνο για τετραγωνικούς πίνακες.

Ορισμός: Έστω $A \in F^{\nu \cdot \nu}$. Ο A λέγεται αντιστρέψιμος αν υπάρχει $B \in F^{\nu \cdot \nu}$ με την ιδιότητα $AB = I_\nu$ και $BA = I_\nu$

π.χ. i) Ο I_ν αντιστρέφεται, γιατί για $B = I$ έχουμε $I_\nu B = B \cdot I_\nu = I_\nu$

ii) Έστω $\kappa \in F$ με $\kappa \neq 0_F$. Επομένως το $\kappa^{-1} \in F$. Έχουμε ότι ο πίνακας $\kappa \cdot I_\nu = \begin{pmatrix} \kappa & & 0 \\ & \kappa & \\ 0 & & \kappa \end{pmatrix}$ αντιστρέφεται, με αντίστροφο τον πίνακα

$$\kappa^{-1} \cdot I_\nu = \begin{pmatrix} \kappa^{-1} & & 0 \\ & \kappa^{-1} & \\ 0 & & \kappa^{-1} \end{pmatrix}$$

Πράγματι $(\kappa \cdot I_\nu)(\kappa^{-1} I_\nu) = (\kappa \cdot \kappa^{-1}) I_\nu \cdot I_\nu = 1_F \cdot I_\nu = I_\nu$

και ομοίως $(\kappa^{-1} I_\nu)(\kappa I_\nu) = (\kappa^{-1} \cdot \kappa) I_\nu I_\nu = 1_F \cdot I_\nu = I_\nu$

iii) Ο $\emptyset_{\nu \cdot \nu} \in F^{\nu \cdot \nu}$ δεν αντιστρέφεται, γιατί αν $B \in F^{\nu \cdot \nu}$ έχουμε $\emptyset_{\nu \cdot \nu} B = \emptyset_{\nu \cdot \nu} \neq I_\nu$

iv) Έστω $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$. Αντιστρέφεται ο A;

Έστω ότι δεν αντιστρέφεται γιατί αν $B = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$,

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 0 & * \\ * & * \end{bmatrix}$$

γιατί η $(1,1)$ συντεταγμένη του AB είναι 0, ενώ το I_2 είναι το 1.

Συμπέρασμα: Υπάρχουν και μη μηδενικοί τετραγωνικοί πίνακες που δεν αντιστρέφονται.

Έστω $A = \begin{bmatrix} \alpha & b \\ c & d \end{bmatrix} \in F^{2 \times 2}$. Τότε ο A αντιστρέφεται αν και μόνο αν $ad - bc \neq 0_F$

Παράδειγμα
Έστω $A=\begin{bmatrix}1 & 5\\ 0 & 1\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ και $B=\begin{bmatrix}1 & -5\\ 0 & 1\end{bmatrix}$. Έχουμε

$AB=\begin{bmatrix}1 & 5\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -5\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ ομοίως $BA=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$. Επομένως ο

A είναι αντιστρέψιμος

Πρόταση: Έστω $A\in F^{\nu\cdot\nu}$ αντιστρέψιμος και $B\in F^{\nu\cdot\nu}$ με $AB=BA=I_\nu$. Τότε ο B είναι μοναδικός, λέγεται αντίστροφος του A και συμβολίζεται $B=A^{-1}$

Απόδειξη
Έστω $C\in F^{\nu\cdot\nu}$ με $AC=CA=I_\nu$. Θα δείξουμε ότι $C=B$. Πράγματι
$C=I_\nu\cdot C=(B\cdot A)\cdot C \overset{\text{προσεταιριστική}}{=} B(AC)=B\cdot I_\nu=B$

Πρόταση: Έστω $A\in F^{\nu\cdot\nu}$ αντιστρέψιμος. Τότε ο πίνακας $A^{-1}\in F^{\nu\cdot\nu}$ είναι επίσης αντιστρέψιμος και $(A^{-1})^{-1}=A$.

Απόδειξη
Αφού ο A^{-1} είναι ο αντίστροφος του A έχουμε $A\cdot A^{-1}=I_\nu$ και $A^{-1}\cdot A=I_\nu$
Αυτές οι σχέσεις όμως μας δίνουν και ότι ο A^{-1} είναι αντιστρέψιμος με αντίστροφο A.

Πρόταση: Έστω $A,B\in F^{\nu\cdot\nu}$ αντιστρέψιμοι. Τότε και ο πίνακας $AB\in F^{\nu\cdot\nu}$ είναι αντιστρέψιμος και $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

Απόδειξη:
Έχουμε $(AB)(B^{-1}A) \overset{\text{προσεταιρ.}}{=} A(B\cdot B^{-1}\cdot A^{-1}=AI_\nu\cdot A^{-1}=A\cdot A^{-1}=I_\nu$ και
$(B^{-1}\cdot A^{-1})(AB)=B^{-1}(A^{-1}A)=B^{-1}I_\nu\cdot B=B^{-1}\cdot B=I_\nu$ Το αποτέλεσμα έπεται

Πρόταση: Έστω $A=\begin{bmatrix} \alpha & b \\ c & d \end{bmatrix} \in F^{2\times 2}$. Αν $\alpha d - bc = 0_F$ τότε ο A δεν αντιστρέφεται.

Απόδειξη

- Έστω ότι δεν ισχύει το συμπέρασμα και θα καταλήξουμε σε αντίφαση. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \in F^{2\times 2}$ με

$$\begin{bmatrix} \alpha & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \overset{(*)}{=} \begin{bmatrix} 1_F & 0 \\ 0 & 1_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Έχουμε ότι (*) δίνει
$$\begin{cases} \alpha x + bz = 1 & (1) \\ cx + dz = 0 & (2) \\ \alpha y + bw = 0 & (3) \\ cy + dw = 1_F & (4) \end{cases}$$

Πολλαπλασιάζουμε (1) με d, (2) με b, αφαιρούμε $\Rightarrow (\alpha d - bc)x = d \Rightarrow d = 0_F$

Πολλαπλασιάζουμε (1) με c (2) με α

Αφαιρούμε $\Rightarrow -(\alpha d - bc)z = c \Rightarrow c = 0_F$

- Άρα $c = d = 0_F$ και η (4) δίνει $0_F = 1_F$ αντίφαση

Πρόταση: Έστω $A=\begin{bmatrix} \alpha & b \\ c & d \end{bmatrix} \in F^{2\times 2}$ Αν $\alpha d - bc \neq 0_F$ τότε ο A αντιστρέφεται, με αντίστροφο τον πίνακα $B = \frac{1}{k}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & \alpha \end{bmatrix}$ όπου $k = \alpha d - bc \in F$.

Απόδειξη

$$AB = \begin{bmatrix} \alpha & b \\ c & d \end{bmatrix} \left(\frac{1}{k} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & \alpha \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{k} \left(\begin{bmatrix} \alpha & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & \alpha \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{k} \left(\begin{bmatrix} \alpha d - bc & 0_F \\ 0_F & \alpha d - bc \end{bmatrix} \right) =$$

$$\frac{1}{k} \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ομοίως δείχνουμε $BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$